1995年 東大数学 文系第1問 理系第1問 ①

$\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$　xとyの同次式

⇓

割って、$\frac{y}{x}=t$ とすると文字数が1つ減る。

両辺を $\sqrt{x}$ で割って、

$$1+\sqrt{\frac{y}{x}} \leqq k\sqrt{2+\frac{y}{x}} \quad \cdots ①$$

解法1 数Ⅲの利用

$t=\sqrt{\frac{y}{x}}$ とおくと、$t>0$　　$\frac{y}{x}=t$ とおくより次数が高くなり計算しやすい。

$$1+t \leqq k\sqrt{t^2+2}$$

$$\Leftrightarrow \quad k \geqq \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2}} \quad \cdots ②$$

すべての $t>0$ に対して成立するので、$k \geqq$(右辺の最大値) となればよい。

$f(t)=\frac{t+1}{\sqrt{t^2+2}}$ とする。

$$f'(t)=\frac{1\times\sqrt{t^2+2}-(t+1)\times\frac{2t}{2\sqrt{t^2+2}}}{t^2+2}$$

$$= \cdots$$

$$= -\frac{t-2}{(t^2+2)^{\frac{3}{2}}}$$

増減表は

t	0		2	
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗	$f(2)$	↘

よって $t>0$ での最大値は $f(2)=\frac{2+1}{\sqrt{2^2+2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$k \geqq \frac{\sqrt{6}}{2}$ を満たす最小のkは $k=\frac{\sqrt{6}}{2}$ //

解法2 数Ⅲの利用

①で $\frac{y}{x}=t$ とおくと

$$1+\sqrt{t} \leqq k\sqrt{2+t}$$

$$\Leftrightarrow \quad k \geqq \frac{\sqrt{t}+1}{\sqrt{t+2}} = g(t) \text{ とおく}$$

解法1と同様 $k \geqq (g(t)\text{の最大値})$ となればよい。

$$g'(t)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\sqrt{t+2}-(\sqrt{t}+1)\times\frac{1}{2\sqrt{t+2}}}{t+2}$$

$$= \cdots$$

$$= \frac{-(\sqrt{t}-2)}{2\sqrt{t}\,(t+2)^{\frac{3}{2}}}$$

解法1とくらべて少しだけ計算が面倒（大差ない）

増減表は

t	0	…	4	…
$g'(t)$		+	0	−
$g(t)$		↗	$g(4)$	↘

左のように、$g(4)$ で最大

$g(4)=\frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4+2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ //

以下、解法1と同様。

解法3 上手い置換（数ⅡBでも可。でも数Ⅲっぽい）

$$② \Leftrightarrow k \geqq \frac{t+1}{\sqrt{t^2+2}} \quad \left(t=\sqrt{\frac{y}{x}} \text{ で } t>0\right)$$

数Ⅲでは常識

に対して、

$t=\sqrt{2}\tan\theta$ とおくと

$t>0$ より $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ で、

$\sqrt{a^2+t^2}$ の形を見たら $t=a\tan\theta$ と置換。

$$k \geqq \frac{\sqrt{2}\tan\theta+1}{\sqrt{2\tan^2\theta+2}}=\frac{\sqrt{2}\tan\theta+1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}}=\frac{\sqrt{2}\tan\theta+1}{\sqrt{2}}\times\cos\theta$$

分母が消えたので簡単

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\sin(\theta+\alpha)$$

但し $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$=\frac{\sqrt{6}}{2}\sin(\theta+\alpha)$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $\alpha<\theta+\alpha<\frac{\pi}{2}+\alpha$ なので、

$\sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ （$\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ のとき）

よって

②の(右辺)の最大値は $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　以下、解答1と同じ。

1995年　東大数学　文系第1問．理系第1問 ②

$\boxed{\text{解法4}}$ 数IIBでも解ける方法

② ⇔ $k \geqq \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2+2}}$　$(t>0)$

⇔ $k\sqrt{t^2+2} \geqq t+1$　$(\because \sqrt{t^2+2}>0)$

↓両辺2乗

⇔ $k^2(t^2+2) \geqq (t+1)^2$　(∵ 両辺 共に 正)

⇔ $(k^2-1)t^2-2t+2k^2-1 \geqq 0$

この不等式が、すべての $t>0$ で成立すればよい。

→ 最大、最小問題へ

つまり（左辺の最小値）$\geqq 0$ となればよい。

左辺の t^2 の係数が k^2-1 なので、

- $k^2-1>0$ なら 下に凸の2次関数 (i)
- $k^2-1<0$ なら 上に凸の 〃 (iii)
- $k^2-1=0$ なら 1次関数となり、(ii)

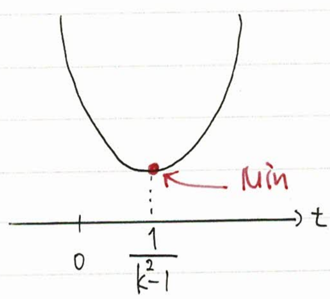
最小値の検討方法が変わる。

(i) $k^2-1>0$ ⇔ $k<-1,\ 1<k$ の時．

（左辺）は下に凸の2次関数．

$$(\text{左辺}) = (k^2-1)\cdot\left(t-\frac{1}{k^2-1}\right)^2 - \frac{1}{k^2-1} + 2k^2-1 \geqq 0$$

よって、軸の位置は $t=\dfrac{1}{k^2-1}>0$ である。



よって、左図のとおり 最小値は頂点である。

よって、$-\dfrac{1}{k^2-1}+2k^2-1 \geqq 0$ ⇔ $(k^2-1)(2k^2-1) \geqq 1$

⇔ $2k^4-3k^2 \geqq 0$ ⇔ $k^2(2k^2-3) \geqq 0$

$k \leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$

② より $k>0$ が明らかなので、$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$

$k<-1,\ 1<k$ を満たすのは、$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$　(i)の結論

(ii) $k^2-1=0$ ⇔ $k=\pm 1$ の時．

$(\text{左辺}) = -2t+1 \geqq 0$

これがすべての $t>0$ で成立すればよいが、

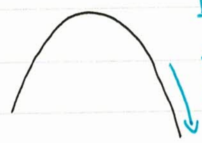
$t>\frac{1}{2}$ となる t で不成立である。

（例えば、$t=3$ を代入すると $-5 \geqq 0$ となり不成立）

(iii) $k^2-1<0$ ⇔ $-1<k<1$ の時．

（左辺）は上に凸の2次関数である。

すると、$t>0$ を満たす t のうち、十分大きな t に対して、（左辺）<0 となるので、不成立



上に凸なので。

tを大きくすると いくらでも小さくなる

以上から、

すべての $t>0$ で ② が成立するためには

$\dfrac{\sqrt{6}}{2} \leqq k$ となればよい。

これを満たす k の最小値は、$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ //

$\boxed{\text{解法5}}$ コーシー・シュワルツの不等式の利用．

与式の両辺は正なので、$k>0$ である。

両辺2乗して、$k^2(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ …①

コーシー・シュワルツの不等式

$(a^2+b^2)(X^2+Y^2) \geqq (aX+bY)^2$ に

$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$　$b=1$　$X=\sqrt{2x}$　$Y=\sqrt{y}$　を代入し

$\left(\frac{1}{2}+1\right)(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

⇔ $\frac{3}{2}(2x+y) \geqq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$

等号成立条件は、$\frac{1}{\sqrt{2}}:1=\sqrt{2x}:\sqrt{y}$　∴ $y=4x$．

①と比較して、求める k の最小値は $k=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$